3. Проекция на выпуклые замкнутые множества в гильбертовых пространствах.

Определение. *Пусть задано метрическое пространство* $\mathbb{M}$ *и некоторое множество* U *из этого пространства. Метрической проекцией элемента* m *на множество* U *называется такой элемент* p *множества* U*, что* $\rho(p,m) = \inf\limits_{u\in U} \rho(u,m)$.

Метрическую проекцию элемента m на множество U будем обозначать $p = Pr_U(m)$.

см. оборот **Теорема.** *(свойства метрической проекции)*

Пусть $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство,* $U \subseteq \mathbb{H}$ *— выпуклое замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения:*

+ 1. *Для любого элемента* h *пространства* $\mathbb{H}$ *существует и единственна его метрическая проекция на множество* U*;*

+ 2. *Оператор проектирования обладает свойством нестрогой сжимаемости, то есть*

$$||Pr_U(h_1) - Pr_U(h_2)||_{\mathbb{H}} \leqslant ||h_1 - h_2||_{\mathbb{H}} \ \forall h_1, h_2 \in \mathbb{H};$$

+ 3. *Элемент* p *является метрической проекцией элемента* h *на множество* U *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\langle p-h, u-p\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \ \forall u \in U$ *(характеристическое свойство проекции).*

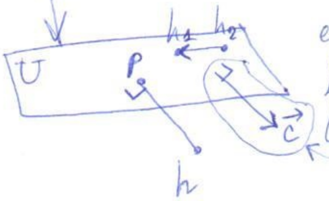
Рассмотрим несколько классических выпуклых замкнутых множеств, укажем явные формулы для вычисления метрической проекции на них.

+ **1.** Проектирование на гиперплоскость $U = \{u \in \mathbb{H} \mid \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}} = \alpha\}$, $c \in \mathbb{H}$, $c \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$. В данном случае

$$\mathbf{Pr_U(h)} = \mathbf{h} - \frac{\langle \mathbf{c}, \mathbf{h}\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||\mathbf{c}||^2_{\mathbb{H}}}\mathbf{c}.$$

Обоснуем этот результат, применив характеристическое свойство проекции и учитывая тот факт, что $u \in U \Leftrightarrow \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}} = \alpha$:

$$\langle Pr_U(h) - h, u - Pr_U(h)\rangle_{\mathbb{H}} = \langle h - \frac{\langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}c - h, u - h + \frac{\langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}c\rangle_{\mathbb{H}} =$$



если $\begin{cases}\langle c, h_1\rangle = \alpha \\ \langle c, h_2\rangle = \alpha\end{cases} \mapsto \langle c, h_1 - h_2\rangle = 0$

поэтому $p = h + \lambda\frac{\vec{c}}{||c||}$: $\langle h + \frac{\lambda\vec{c}}{||\vec{c}||}, \vec{c}\rangle = \alpha \Leftrightarrow \lambda||c|| = \alpha - \langle h, c\rangle \mapsto p = h - \frac{\langle h, c\rangle - \alpha}{||c||^2}c$

Док-во теоремы:

① $p = pr_U h: \|p-h\|_H = \inf\limits_{u\in U} \|u-h\|_H$, т.е. $p \in U_*$ в задаче $J(u) = \|u-h\|_H \to \inf\limits_{u\in U} \Leftrightarrow \underbrace{\|u-h\|_H^2}_{F(u)} \to \inf\limits_{u\in U}$

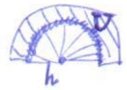
по Т.В. (сильный вариант) при $\begin{cases} U\text{ — вып. замк. в } H\text{-множ.} \\ F(u)\text{ — н./непр. снизу} \\ \text{сильно вып.} \end{cases} \Rightarrow U_* = \{u_*\}$ ч.т.д.

для $F(u) = \|Iu-h\|_H^2$, $I \in \mathcal{L}(H\to H)$, $h \in H$ $\quad \exists F''(u) \cong 2I^*I = 2I$ — непр. $\mapsto F(u)$ — непр. $\mapsto F(u)$ н/непр. снизу

$\mapsto \langle \underbrace{F''(u)}_{6_{F(u)}} h, h\rangle_H = \underbrace{2}_{æ}\|h\|_H^2 \mapsto F(u)$ с. вып.

Замечание: •) если U — незамкнуто, возможно $\nexists pr_U h$:

••) если U — невыпукло, возможно $\exists$, но $\nexists!$ $pr_U h$:



③ пусть $p = pr_U h \Rightarrow \|u-h\|^2 \geq \|p-h\|^2 \ \forall u\in U$, где $p \in U$

фиксируем $\forall u \in U$

$\|\underbrace{\lambda u + (1-\lambda)p}_{\in U} - h\|^2 \geq \|p-h\|^2$ рассм. при $\lambda \in (0;1]$

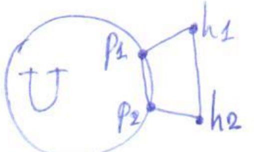
$\|\lambda(u-p) + (p-h)\|^2 = \langle \lambda(u-p)+(p-h), \lambda(u-p)+(p-h)\rangle = \lambda^2\|u-p\|^2 + 2\lambda\langle u-p, p-h\rangle + \cancel{\|p-h\|^2} \geq \cancel{\|p-h\|^2}$

$\Rightarrow \lambda^{\cancel{2}}\|u-p\|^2 + 2\cancel{\lambda}\langle u-p, p-h\rangle \geq 0 \ \forall u \in U \xrightarrow{\lambda\to+0} \langle u-p, p-h\rangle \geq 0 \ \forall u\in U$ ч.т.д.

пусть $\langle u-p, p-h\rangle \geq 0 \ \forall u \in U$, где $p\in U$

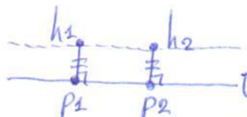
$\forall u\in U$ рассм. $\|u-h\|^2 = \langle u-p+p-h, u-p+p-h\rangle = \underbrace{\|u-p\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle u-p, p-h\rangle}_{\geq 0} + \|p-h\|^2 \geq \|p-h\|^2$, т.е. $p = pr_U h$ ч.т.д.

② $\begin{cases} p_1 = pr_U h_1 \\ p_2 = pr_U h_2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \langle u-p_1, p_1-h_1\rangle \geq 0 \\ \langle u-p_2, p_2-h_2\rangle \geq 0 \end{cases} \forall u \in U \ \xrightarrow[u=p_1]{u=p_2} \begin{cases} \langle p_2-p_1, p_1-h_1\rangle\geq 0 \\ \langle p_1-p_2, p_2-h_2\rangle \geq 0\end{cases} + \mapsto \langle p_2-p_1, p_1-h_1+h_2-p_2\rangle \geq 0$



ч.т.д. $\left[\begin{array}{l} \text{либо } p_2=p_1 \mapsto 0\geq 0 \\ \|h_2-h_1\| \geq 0 = \|p_2-p_1\| \\ \text{либо } p_2\neq p_1 \mapsto \|h_2-h_1\| \geq \|p_2-p_1\| \end{array}\right.$ $\quad \|h_2-h_1\|\|p_2-p_1\| \underset{К-Б}{\geq} \langle h_2-h_1, p_2-p_1\rangle \geq \|p_2-p_1\|^2$

Замечание: $\|p_1-p_2\| \underset{\text{возможно}}{=} \|h_1-h_2\|$: например



$U = \{u\in H: \langle c,u\rangle_H = \alpha, c\neq \theta_H\}$ при условии $\langle c,h_1\rangle_H = \langle c,h_2\rangle_H$

$\underset{\text{как задача}}{\|p_2-p_2\|} = \left\| h_1 - \frac{\cancel{\langle h_1,c\rangle - \alpha}}{\|c\|^2}c - h_2 + \frac{\cancel{\langle h_2,c\rangle-\alpha}}{\|c\|^2}c\right\| = \|h_1-h_2\|$

Следствие из ③: пусть $p = pr_U h$, где $\|h-p\|>0 \Rightarrow \langle u-p, p-h\rangle \geq 0 \ \forall u\in U$

Рассм-м вектора $h+\alpha(p-h)$ при $\alpha\leq 1$ (в т.ч. $\alpha<0$):

$\langle u-p, \underbrace{p-(h+\alpha(p-h))}_{(p-h)(1-\alpha)}\rangle = \underbrace{(1-\alpha)}_{\geq 0}\underbrace{\langle u-p, p-h\rangle}_{\geq 0} \geq 0$, т.е. весь луч K проектируется в p

$pr_U(\underbrace{h+\alpha(p-h)}_{\alpha p+(1-\alpha)h}) = p$

$$= -\left(\frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}\right)\cdot\left(\langle c,u\rangle_{\mathbb{H}} - \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}\langle c,c\rangle_{\mathbb{H}}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}\right)\cdot\left(\langle c,u\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha\right) = 0\ \forall u \in U.$$

Из этой формулы непосредственно вытекают формулы для метрической проекции на полупространство и слой:

$$U = \{u \in \mathbb{H} \mid \langle c,u\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \alpha\} \Rightarrow Pr_U(h) = \begin{cases} h - \frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}c, \text{ если } \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} > \alpha, \\ h, \text{ если } \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \alpha. \end{cases}$$

$$U = \{u \in \mathbb{H} \mid \alpha \leqslant \langle c,u\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \beta\} \Rightarrow Pr_U(h) = \begin{cases} h - \frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \alpha}{||c||^2_{\mathbb{H}}}c, \text{ если } \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} < \alpha, \\ h - \frac{\langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} - \beta}{||c||^2_{\mathbb{H}}}c, \text{ если } \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} > \beta, \\ h, \text{ если } \alpha \leqslant \langle c,h\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \beta. \end{cases}$$

+ **2.** Проектирование на шар $U = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $u_0 \in \mathbb{H}$, $R > 0 \in \mathbb{R}^1$. Формула для проекции выглядит так:

$$\mathbf{Pr_U(h)} = \begin{cases} u_0 + \frac{R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}(h - u_0), \text{ если } ||h-u_0||_{\mathbb{H}} > R, \\ h, \text{ если } ||h-u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant R. \end{cases}$$

Заметим, что $u \in U \Leftrightarrow ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant R$, и, по неравенству Коши-Буняковского,

$$|\langle u_0 - h, u - u_0\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \cdot ||h - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant R||h - u_0||_{\mathbb{H}}.$$

Записывая характеристическое свойство проекции, имеем

$$\langle Pr_U(h) - h, u - Pr_U(h)\rangle_{\mathbb{H}} = \langle (u_0 - h) + \frac{R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}(h - u_0), u - u_0 - \frac{R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}(h-u_0)\rangle_{\mathbb{H}} =$$

$$= \frac{||h-u_0||_{\mathbb{H}} - R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}\left(\langle u_0 - h, u - u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}\langle u_0 - h, u_0 - h\rangle_{\mathbb{H}}\right) =$$

$$= \frac{||h-u_0||_{\mathbb{H}} - R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}\left(\langle u_0 - h, u - u_0\rangle_{\mathbb{H}} + R||h-u_0||_{\mathbb{H}}\right) \geqslant \{||h-u_0||_{\mathbb{H}} - R > 0\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{||h-u_0||_{\mathbb{H}} - R}{||h-u_0||_{\mathbb{H}}}\left(-R||h-u_0||_{\mathbb{H}} + R||h-u_0||_{\mathbb{H}}\right) = 0\ \forall u \in U.$$

+ **3.** Проектирование на замкнутые подпространства.

Приведём общую схему выведения формулы проектирования на замкнутое подпространство $L = lin(a_1, a_2, \dots a_n)$, где a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ — линейно независимые элементы гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Будем считать, что нами построена (например, с помощью известной процедуры ортогонализации Грама-Шмидта) ортогональная система линейно независимых элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ из L. Воспользуемся определением метрической проекции:

$$p = Pr_L(u) \Leftrightarrow ||u - p||^2_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in L} ||u - v||^2_{\mathbb{H}}.$$

Поскольку $v \in L$, то $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_n e_n$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что

$$||u - v||^2_{\mathbb{H}} = ||u||^2_{\mathbb{H}} - 2\langle u, v\rangle_{\mathbb{H}} + ||v||^2_{\mathbb{H}} = ||u||^2_{\mathbb{H}} - 2\sum_{i=1}^{n}\langle u, \alpha_i e_i\rangle_{\mathbb{H}} + ||\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n||^2_{\mathbb{H}}.$$

Но элементы e_i образуют ортогональную систему, поэтому $\langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{H}} = 0$, $i \neq j$, из чего вытекает $||\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n||^2_{\mathbb{H}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 ||e_i||^2_{\mathbb{H}}$. С учётом этого имеем

$$||u - v||^2_{\mathbb{H}} = ||u||^2_{\mathbb{H}} + \sum_{i=1}^{n}\left(||e_i||^2_{\mathbb{H}}\alpha_i^2 - 2\langle u, e_i\rangle_{\mathbb{H}}\alpha_i\right).$$

Ясно, что для минимизации полученного выражения нам достаточно по отдельности проминимизировать каждое слагаемое из суммы. Для этого (вспомним свойства обычной квадратичной функции) надо положить $\alpha_i = \dfrac{\langle u, e_i\rangle_{\mathbb{H}}}{||e_i||^2_{\mathbb{H}}}$. Итак,

$$\mathbf{p} = \mathbf{Pr_L(u)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{e_i}\rangle_{\mathbb{H}}}{||\mathbf{e_i}||^2_{\mathbb{H}}}\mathbf{e_i}.$$

Проиллюстрируем этот факт на таком примере: рассмотрим в $\mathbb{H} = L^2(0,1)$ n-мерное подпространство L_n, состоящее из кусочно-постоянных функций

$$u(t) \equiv u_i = const \text{ при } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что оператор проектирования $Pr_{L_n} : L^2(0,1) \to L_n$ действует по правилу

$$(Pr_{L_n}u)(t) = n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} u(s)\,ds \text{ при } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что функции

$$e_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), \\ 0, \text{ если } t \in \left[0, \frac{i-1}{n}\right) \bigcup \left[\frac{i}{n}, 1\right), \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

являются линейно независимыми элементами L_n, причём

$$\langle e_i, e_j\rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e_i(t)e_j(t)\,dt = 0, \quad ||e_i||^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e_i^2(t)\,dt = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} dt = \frac{1}{n}.$$

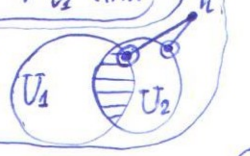
Замечание: на практике, если условие теоремы не выполнено, U_1 и U_2 можно поменять ролями.

Применяя полученный выше результат, имеем

$$(Pr_{L_n}u)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overbrace{\langle u, e_i\rangle_{L^2(0,1)}}^{\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} u(s)ds}}{\underbrace{||e_i||^2_{L^2(0,1)}}_{1/n}} e_i = n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} u(s)\,ds \text{ при } t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обобщение на $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$: Если $pr_{U_1} h \in \bigcap\limits_{i=2}^{n} U_i$, то $pr_{U_1} h = pr_{\bigcap_{i=1}^{n} U_i} h$

Теорема: (о проектировании на пересечение мн-в) пусть U_1, U_2 — вып. замкн. множ. из H-гильб. Если $pr_{U_1} h \in U_2$, то $pr_{U_1 \cap U_2} h = pr_{U_1} h$.



Док-во:

① $U_1 \cap U_2$ — выпукло (вып. вып. {очевидно}); $U_1 \cap U_2$ — замкнуто (замк. замк.)

② $\exists_1 ! \underbrace{pr_{U_1} h}_{p_1}, pr_{U_2} h, \underbrace{pr_{U_1 \cap U_2} h}_{p}$ — обозн.

③ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ $\Rightarrow$ $\rho(pr_{U_1} h, h) \leq \rho(pr_{U_1 \cap U_2} h, h)$

④ $\underbrace{\rho(pr_{U_1} h, h)}_{\rho(p_1, h)} \geq \inf\limits_{\bar{p} \in U_1 \cap U_2} \rho(\bar{p}, h) = \rho(pr_{U_1 \cap U_2} h, h) = \rho(p, h)$; $pr_{U_1} h \in U_1$ всегда, $\in U_2$ по усл. Т. $\Rightarrow pr_{U_1} h \in U_1 \cap U_2$

$\rho(p_1, h) \leq \rho(pr_{U_1 \cap U_2} h, h) = \rho(p, h)$

⑤ $p \in U_1 \cap U_2 \ni p_1$, $\rho(p, h) = \rho(p_1, h) = \inf\limits_{v \in U_1 \cap U_2} \rho(v, h)$! п. проекции $\Rightarrow p = p_1$ т.е. $pr_{U_1 \cap U_2} h = pr_{U_1} h$ ч.т.д.